Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 1
Séance 11
Différences finies

Table des matières

Introduction ***2***
I. Les bases ***2***
II. Différence finie décentrée à droite ***2***
III. Différence finie décentrée à gauche ***3***
IV. Différence finie centrée ***3***
V. introduction à matplotlib ***4***
VI. Point Python : Le slicing ***4***
VII. TP5 – Différences finies ***5***

Introduction

De nombreuses fonctions ne peuvent pas être représentées par des formules analytiques. Il est donc impossible de calculer leurs dérivées, même avec un code de calcul formel. La méthode des différences finies propose un moyen de calculer une approximation numérique des valeurs des dérivées d'une fonction.

Voici quelques exemples de fonctions dont nous n'avons pas de forme analytique :

- **La fonction gamma**, $\Gamma(x)$ est une généralisation de la factorielle pour les nombres complexes. Elle est définie par une intégrale impropre :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

  Bien que cette fonction soit bien définie et utile dans de nombreux contextes, elle n'a pas de représentation simple sous forme de formule fermée en termes de fonctions élémentaires pour la plupart des valeurs de x.

- La fonction zêta de Riemann est définie par la série infinie pour $\Re(s) > 1$ ($\Re(s)$ partie réel d'un nombre complexe):

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

- Les fonctions d'Airy, Ai(x) et Bi(x) sont des solutions d'une équation différentielle spécifique connue sous le nom d'équation d'Airy. Elles sont définies par des intégrales ou des séries infinies, et n'ont pas de représentation fermée simple :

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)dt$$

Voici quelques exemples parmi d'autres de fonctions non analytiques.
Elles sont très importantes dans beaucoup de domaines de l'ingénierie, de physique (optique, onde, électromagnétismes, …), de cryptographies.

I. Les bases

On considère une fonction $u: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ régulière (autant de fois dérivable que nécessaire dans tout le chapitre) dont on envisagera que pour N+1 valeurs discrètes.
On suppose l'intervalle $[a, b]$ découpé en N intervalles et on pose :

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}, N \ entier \ \geq 1$$

et on introduit des points de grilles x_n tel que :

$$x_n = a + n.\Delta x , 0 \leq j \leq N$$

On note u_n la valeur de u en x_n, $u_n = u(x_n)$.

II. Différence finie décentrée à droite

A partir de la définition de la dérivée

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

on introduit pour approcher $u'(x_n)$ la différence finie décentrée à droite :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h}.$$

On pourra aussi le noter :

$$f_d(x_n) = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$

Exemple :

Pour la fonction carré, on peut approximer la dérivée en 1 avec la différence finie décentrée à droite en choisissant un pas de 0,1:

$$u'(1) \approx \frac{u(1{,}1) - u(1)}{0{,}1} = 2{,}1$$

III. Différence finie décentrée à gauche

En suivant la même logique, on introduit la différence finie décentrée à gauche :

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h}.$$

On pourra aussi le noter :

$$f_g(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h}$$

Exemple :

Pour la fonction carré, on peut approximer la dérivée en 1 avec la différence finie décentrée à droite en choisissant un pas de 0,1:

$$u'(1) \approx \frac{u(1) - u(0{,}9)}{0{,}1} = 1{,}9$$

IV. Différence finie centrée

De même, on introduit la différence finie centrée :

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}.$$

On pourra aussi le noter :

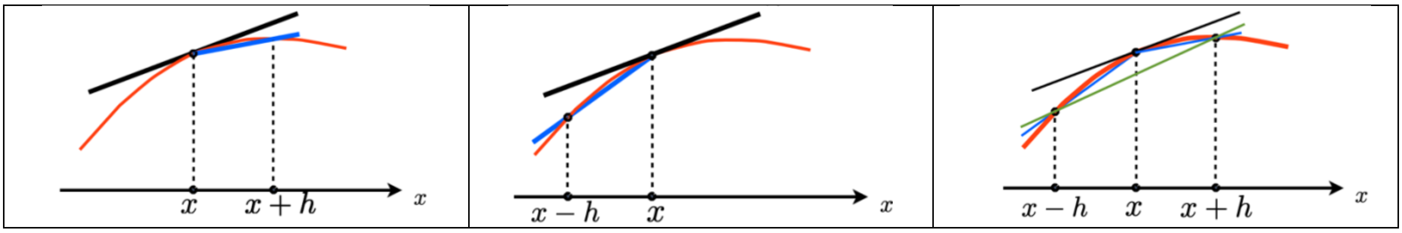
$$f_c(x_n) = \frac{f(x_n + h) - f(x_n - h)}{2 \times h}$$

Exemple :

Pour la fonction carré, on peut approximer la dérivée en 1 avec la différence finie décentrée à droite en choisissant un pas de 0,1:

$$u'(1) \approx \frac{u(1{,}1) - u(0{,}9)}{2 \times 0{,}1} = 2$$

Différence finie décentrée à droite	Différence finie décentrée à gauche	Différence finie centrée



V. introduction à matplotlib

cf. fichier intro matplotlib.py

VI. Point Python : Le slicing

À faire avant le TP5 !

Le slicing en Python est une technique puissante utilisée pour accéder à une partie d'une séquence (comme des listes, des chaînes de caractères, des tuples, etc.). Cette fonctionnalité permet de créer des sous-séquences sans modifier l'originale. Comprendre le slicing est essentiel pour manipuler efficacement les données dans Python.

Notation de base

Le slicing utilise la syntaxe suivante :

```
liste[start:stop:step]
```


À tester pour comprendre :

```
liste = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

# Extraire une sous-liste du 3e au 7e élément (indices 2 à 6)
sousliste = liste[2:7]
print(sousliste)  # Output: [2, 3, 4, 5, 6]

# À partir du début jusqu'au 5e élément (indice 0 à 4)
debut_cinq = liste[:5]
print(debut_cinq)  # Output: [0, 1, 2, 3, 4]

# À partir du 5e élément jusqu'à la fin
depuis_cinq = liste[5:]
print(depuis_cinq)  # Output: [5, 6, 7, 8, 9]
# Prendre un élément sur deux
deux_deux = liste[::2]
print(deux_deux)  # Output: [0, 2, 4, 6, 8]

# Prendre un élément sur trois à partir du 2e élément
trois_debut_deux = liste[1::3]
print(trois_debut_deux)  # Output: [1, 4, 7]

# Prendre les 3 derniers éléments
trois_dernier = liste[-3:]
print(trois_dernier)  # Output: [7, 8, 9]
```

```
# Tous les éléments sauf les 2 derniers
Tous_sauf_deux_derniers = liste[:-2]
print(Tous_sauf_deux_derniers)  # Output: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

#Avec numpy :
import numpy as np
l = np.array([1, 2, 3])
l1 = np.array([4, 5, 6])
l + l1
```

VII. TP5 – Différences finies

Pour x réel dans l'intervalle $[0, 1]$, on pose $f\ (x)\ =\ sin\ x$ ou toute autre fonction dont le calcul de la dérivée peut être mené à bien de façon analytique. On se donne un entier N (N ≈ 10 typiquement dans un premier temps).
(i) Représenter graphiquement la fonction f en utilisant N points de grille uniformément répartis sur l'intervalle [0, 1].
(ii) Représenter graphiquement les courbes discrètes obtenues en utilisant des différences finies et comparer à la fonction dérivée exacte évaluée aux points de la grille.
(iii) Faire les points (i) et (ii) avec Excel.
(iii) Calcul de la précision des algorithmes. On se donne un point x_0 fixé. On fait varier le pas Δx. Afin de mesurer l'ordre de grandeur de l'erreur lorsque Δx tend vers 0, on introduit la quantité $\varepsilon_g(\Delta x) = |\ {f_g}'(x_0, \Delta x) -\ f'(x_0)\ |$.
Représenter graphiquement la courbe $(-log(\Delta x), log(\varepsilon\_g\ (\Delta x)(\Delta x))$. Mêmes questions avec les approximations décentrée à droite et les approximations centrées de la dérivée première ou de la dérivée seconde (*cours séance 12*).